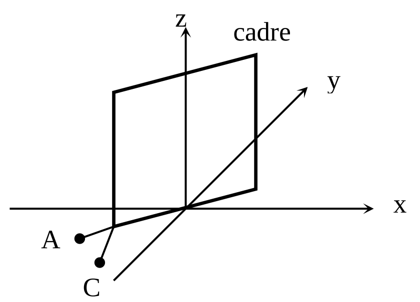
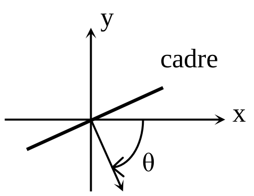
Electromagnétisme 2 : Induction

Induction de Neumann

Exercice 1 : Calcul d'une force électromotrice induite

On dispose d'un cadre carré fixe de côté a comportant N spires d'un fil conducteur d'extrémités A et C dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u_y}$. La normale au cadre fait un angle θ avec $\vec{u_x}$.





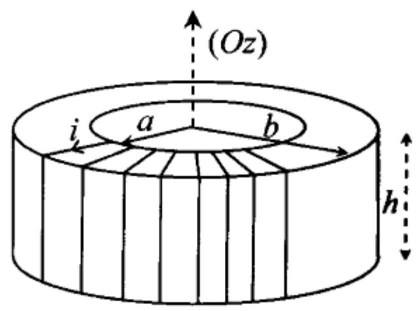
1/ Calculer la force électromotrice $e(t)$ qui apparaît entre les bornes de sortie A et C du cadre.

2/ Vérifier que le potentiel vecteur en un point M quelconque peut s'écrire $\vec{A} = \dfrac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2}$.

3/ Calculer par une autre méthode la force électromotrice $e(t)$.

Exercice 2 : Inductance propre d'une bobine torique

On considère un circuit formé de N spires jointives bobinées sur un tore de section rectangulaire. On note h sa hauteur, a et b les rayons intérieur et extérieur.

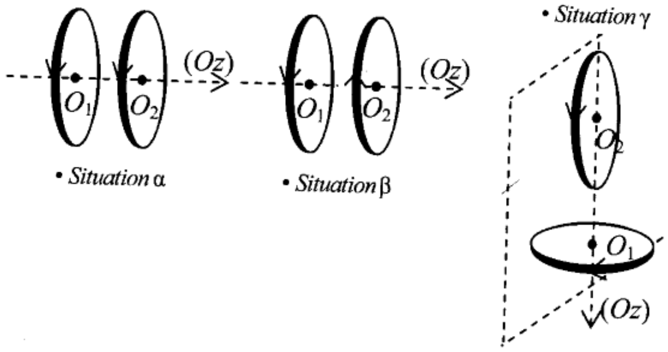


1/ Déterminer son inductance propre à partir de l'expression du flux propre.

2/ Retrouver cette inductance propre par la méthode énergétique.

Exercice 3 : Signe d'une inductance mutuelle

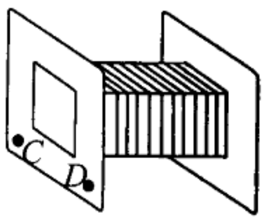
Deux spires circulaires filiformes orientées, notées (1) et (2), de centres O_1 et O_2, sont représentées ci-dessous dans trois situations. Ces spires sont perpendiculaires au plan de la figure, la partie en gras étant située en avant de ce plan. L'orientation choisie pour chaque circuit est indiquée par une flèche. Dans les deux premières dispositions, notées α et β, les deux spires sont coaxiales. Dans la dernière, leurs axes sont coplanaires et orthogonaux.



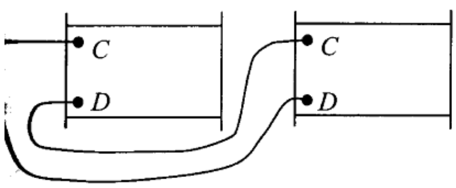
Indiquer dans chaque cas le signe de l'inductance mutuelle entre les deux spires (en le justifiant !).

Exercice 4 : Étude expérimentale du couplage par mutuelle entre deux bobines (1)

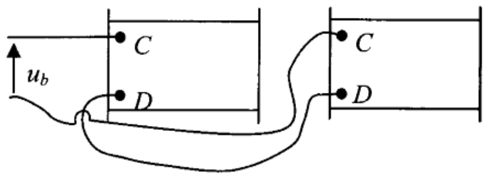
On dispose de deux bobines identiques B_1 et B_2, chacune d'inductance propre L et de résistance ohmique $r = 8\ \Omega$. On repère les bornes de chaque bobine par les lettres C et D.



Les deux bobines sont placées à proximité l'une de l'autre. On les connecte en série sans les déplacer de manière à créer un nouveau dipôle. La connexion se fait selon les deux possibilités suivantes :



Dipôle (a) : la borne D de (S_1) est reliée à la borne C de (S_2)



Dipôle (b) : la borne D de (S_1) est reliée à la borne D de (S_2)

On alimente successivement chacun des dipôles (a) et (b) par un courant sinusoïdal de fréquence $f = 2$ kHz. La mesure du module de l'impédance donne $Z_a = 375\ \Omega$ et $Z_b = 225\ \Omega$.

En déduire les valeurs de l'inductance propre L de chaque bobine et de l'inductance mutuelle M des deux bobines. Que vaut le coefficient de couplage $k = \dfrac{|M|}{L}$?

Exercice 5 : Étude expérimentale du couplage par mutuelle entre deux bobines (2)

On considère 2 bobines identiques, formées de N spires circulaires de rayon a, d'inductance L, que l'on place de façon que les 2 bobinages soient coaxiaux, avec le même sens d'enroulement, la distance entre leurs centres étant repérée le long de l'axe commun Oz par la longueur d.

On se propose de mesurer le couplage entre les 2 bobines en envoyant dans l'une d'elles, dite bobine 1, une tension triangulaire et en comparant cette tension avec la tension induite dans l'autre, celle-ci étant en circuit ouvert. On a branché en série entre le générateur de fonction et la première bobine une résistance $R = 100\ \Omega$. On néglige la résistance des bobines.

1/ Faire le schéma du montage.

2/ Les traces observées à l'oscilloscope ont l'allure suivante :

- Aux bornes du générateur : tension triangulaire d'amplitude crête à crête 1,4 V et de période $T = 1$ ms ;
- Aux bornes de la bobine 2 : tension rectangulaire d'amplitude crête à crête A variable selon d, de période T, en phase avec la tension aux bornes de la bobine 1.

Représenter l'allure des signaux visualisés à l'oscilloscope.

3/ En faisant varier la distance d entre les bobines, on observe pour l'amplitude A du signal induit les valeurs suivantes :

d (en cm)	4	5	6	7	8	10	12	16	20
A (en mV)	43	33	26	21,5	17	11,5	8	4,2	2,4

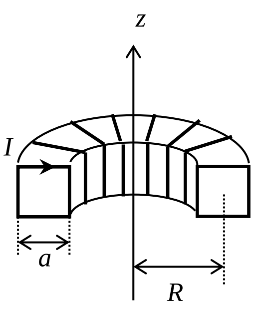
3/1. Écrire les équations électriques du circuit.

3/2. Établir l'expression de l'inductance mutuelle M entre les 2 bobines en fonction de la période T du signal d'entrée, de son amplitude crête à crête Δe, de l'amplitude crête à crête A du signal induit et de la résistance R.

3/3. Calculer (en mH) l'inductance mutuelle M entre les deux bobines pour chaque valeur de d. Commenter.

Exercice 6 : Induction mutuelle entre une bobine torique et un fil infini – Principe de la pince ampèremétrique

Un solénoïde a la forme d'un tore de rayon R et de section carrée de côté a. Il est constitué de N spires jointives.



On place suivant l'axe Oz un fil infiniment long parcouru par un courant I' (orienté dans le sens des z croissants).

1/ Déterminer le flux Φ' du champ magnétique $\vec{B'}$ créé par le fil à travers le solénoïde.

2/ En déduire l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

3/ On suppose que $I'(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et on mesure l'intensité $i(t)$ du courant induit dans le tore, que l'on ferme sur un ampèremètre (la résistance totale du circuit torique vaut alors R').

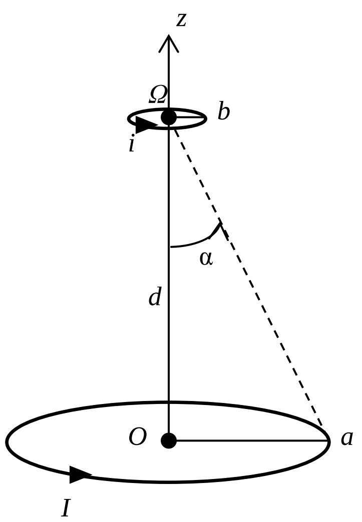
3/1. Déterminer la valeur $i(t)$ de l'intensité du courant qui traverse le circuit torique en régime sinusoïdal établi.

3/2. AN : N = 1000 ; a = 2 cm ; R = 5 cm ; ω = 100π rad.s^{-1} ; R' = 1 Ω. Calculer l'amplitude du courant $i(t)$.

3/3. Que se passe-t-il pour $L\omega$ très grand devant R' ? Commenter.

Exercice 7 : Calcul du coefficient d'inductance mutuelle entre deux spires

Soient deux spires conductrices, de même axe Oz, de centres respectifs O et Ω, de rayons respectifs a et b ($b \ll a$), distantes de d, parcourues par des courants d'intensité respective I et i. On pose $\tan\alpha = \dfrac{a}{d}$.



1/ *Calcul simplifié*

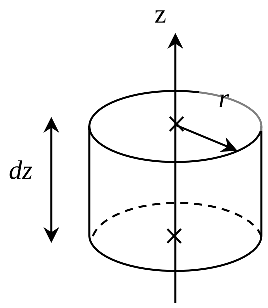
1/1. Calculer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par la grande spire au point Ω.

1/2. En négligeant toute variation de $\vec{B}$ dans la région de la petite spire, calculer le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la petite spire, puis le coefficient d'inductance mutuelle M_0 entre les deux spires.

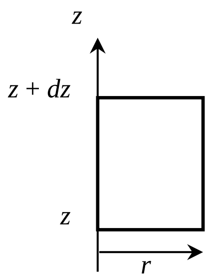
2/ On tient maintenant compte des variations de $\vec{B}$ au voisinage de l'axe Oz.

2/1. Par des considérations de symétries et d'invariance du problème précises, montrer que : $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\vec{e_r} + B_z(r,z)\vec{e_z}$ dans la base cylindrique d'axe Oz.

2/2. On note $B_0(z) = B_z(0,z)$. En appliquant le théorème de Gauss à travers le cylindre d'axe Oz, situé entre z et $z+dz$, de rayon r est suffisamment petit, montrer que l'on peut écrire : $B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0}{dz}(z)$.



2/3. En appliquant le théorème d'Ampère le long du contour rectangulaire représenté sur la figure ci-contre (r n'est plus supposé petit ici), montrer que : $B_z(r,z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2B_0}{dz^2}(z)$.

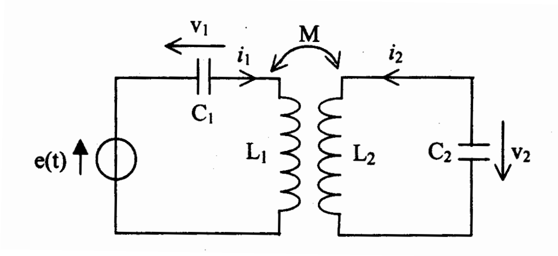


3/ Montrer que, si l'on tient compte des développements établis à la question 2/ le coefficient d'inductance mutuelle M est égal à :

$$M = M_0 - \frac{\pi b^4}{8I}\frac{d^2B_0}{dz^2}(z=b)$$

Exercice 8 : Couplage magnétique entre deux circuits oscillants

On considère le montage de la figure suivante.



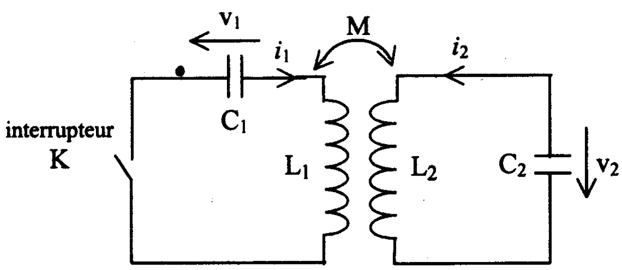
Les résistances des deux bobines (circuits rigides et immobiles) sont supposées négligeables. On appelle L_1 et L_2 les inductances propres des deux bobines et M l'inductance mutuelle des deux circuits (M dépend de la position relative des deux bobines). On note i_1 et i_2 les intensités des courants circulant dans chaque circuit.

1/ On s'intéresse d'abord à l'effet du couplage sur le comportement de deux circuits oscillants dans le cas du régime libre (cas où $e(t)=0$). Dans tout ce qui suit, on supposera que $L_1 = L_2 = L$ et que C_1 et C_2 sont deux condensateurs identiques de capacité C.

1/1. Écrire le couple d'équations différentielles auxquelles obéissent les tensions v_1 et v_2.

1/2. Exprimer les solutions générales $v_1(t)$ et $v_2(t)$ du régime libre.

2/ On charge le condensateur C_1 (C_2 étant déchargé). On réalise le montage de la figure suivante et on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Les conditions initiales sur v_1 et v_2 sont donc : $v_1(0) = v_0$ et $v_2(0) = 0$.



2/1. Établir les expressions $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

2/2. On se place dans le cas d'un couplage faible ($M \ll L$). Représenter l'allure des courbes $v_1(t)$ et $v_2(t)$. Quelle serait l'allure de ces courbes si on tenait compte des résistances des bobines d'inductance L (on ne demande aucun calcul).

3/ On suppose maintenant que la source de tension $e(t)$ est sinusoïdale : $e(t)=E\cos(\omega t)$. Exprimer $v_1(t)$ et $v_2(t)$ en régime permanent sinusoïdal.

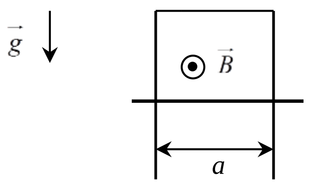
Induction de Lorentz

Exercice 9 : Rail de Laplace vertical

Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de *l*, glisse sans frottement une tige horizontale MM', de masse *m*, grâce à deux contacts glissants M et M'. On considère que l'axe Oz est parallèle aux tiges verticales et l'axe Oy est parallèle à la tige MM'.

On négligera les résistances de la tige MM' et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits.

On produit un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent, normal au plan du circuit formé par la tige MM' et les rails et dirigé suivant $\vec{u_x}$.



On note $\vec{g}=-g\vec{u_z}$ l'accélération de la pesanteur.

1/ Étudier qualitativement l'évolution du système.

2/ Les extrémités supérieures des rails sont reliées à une résistance *R*. La tige MM' est abandonnée sans vitesse initiale. On désignera par $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit et par $v(t)$ la vitesse de la tige, à l'instant *t*.

2/1. Déterminer la force électromotrice induite *e* dans la tige MM'. En déduire l'équation électrique du montage.

2/3. Établir l'équation mécanique du montage.

2/3. Déterminer la loi d'évolution de $v(t)$.

3/ Déterminer la puissance des forces de Laplace et l'exprimer en fonction de $i(t)$. Conclure sur le bilan de puissance.

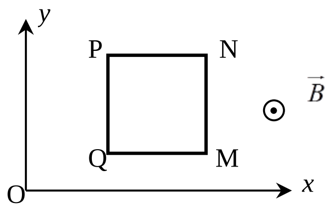
Exercice 10 : Moteur linéaire

Le cadre MNPQ (carré, de côté *a*) est constitué de *N* spires. Il se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v_c}=v_c\,\vec{e_x}$ dans un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B}(x,t)=B_m\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{v_0}\right)\right)\vec{e_z}$$

(où v_0 est une constante).

On appelle $\vec{E}(x,t)$ le champ électrique associé à ce champ magnétique.



1/ On appelle $\mathcal{R}'$ le référentiel en translation par rapport à $\mathcal{R}$ à la vitesse $\vec{v_c} = v_c\,\vec{e_x}$. A l'aide de la force de Lorentz, déterminer la relation entre $\left(\vec{E},\vec{B}\right)$ dans R et $\left(\vec{E}',\vec{B}'\right)$ dans $\mathcal{R}'$.

2/ Pour quelle vitesse du cadre la fém. induite est-elle nulle ?

3/ Calculer la fém. induite dans le cadre.

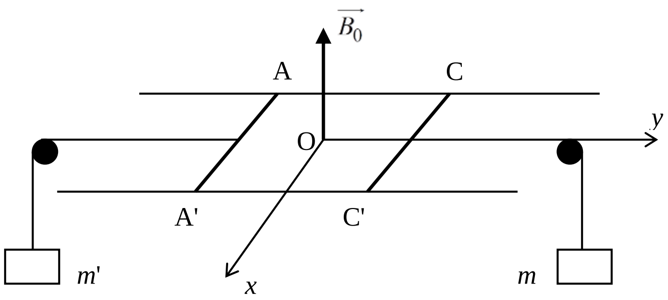
4/ En déduire le courant induit.

5/ Exprimer la force de Laplace subie par le cadre à l'instant t. Quelle est sa valeur moyenne au cours du temps ?

Exercice 11 : Dispositif inspiré des rails de Laplace

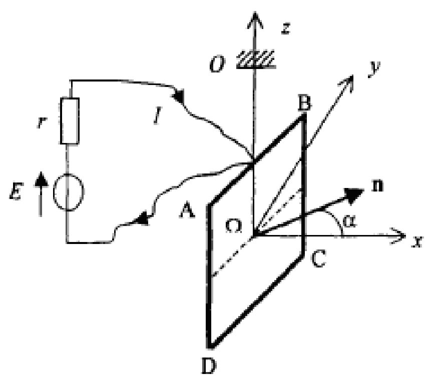
Les deux barres AA' et CC' se déplacent sans frottement sur deux rails horizontaux parallèles, dans un champ magnétique vertical uniforme. Les deux poulies sont sans masses, ainsi que les barres, lesquelles possèdent une résistance R.

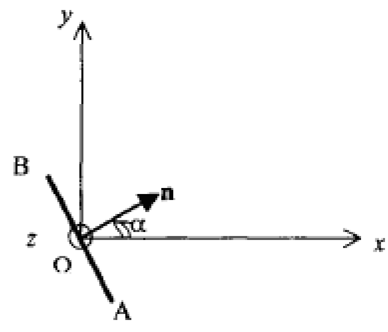
Déterminer les vitesses des deux barres à l'instant t sachant qu'à l'instant initial elles sont nulles.



Exercice 12 : Galvanomètre à cadre mobile

ABCD est un cadre conducteur, de côté $2a$, de résistance R, de coefficient d'autoinduction négligeable, de moment d'inertie J par rapport à l'axe Ωz, constitué d'un enroulement de N spires identiques, de surface S. Il est suspendu à un fil de torsion ΩO, de longueur b, de constante de torsion C (on rappelle que le couple de rappel qui s'exerce sur le fil s'écrit $\Gamma = -C\alpha$, où α est l'angle de torsion du fil).





L'ensemble est plongé dans un champ magnétique radial, de norme constante : $\vec{B} = B_0\,\vec{u}_{AB}$, où $\vec{u}_{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2a}$ est le vecteur unitaire colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. La position du cadre est repérée par l'angle α entre l'axe Ox et la normale $\vec{n}$ au cadre. Quand le système est à l'équilibre, $\alpha = 0$. Au cours de son mouvement, le cadre est soumis à un couple de frottement fluide $-h\dfrac{d\alpha}{dt}\vec{e_z}$.

Le cadre est fermé sur un circuit électrique comportant un série un générateur de fém E et une résistance r. Le système est abandonné sans vitesse dans une position définie par l'angle $\alpha_0 \neq 0$.

1/ Que se passe-t-il ?

2/ Déterminer le moment des forces de Laplace par rapport à l'axe Ωz et la fém induite. En déduire l'équation mécanique du système puis l'équation électrique du circuit. On posera $\Phi_0 = 4a^2NB_0$.

3/ Montrer que l'équation du mouvement du cadre se met sous la forme :

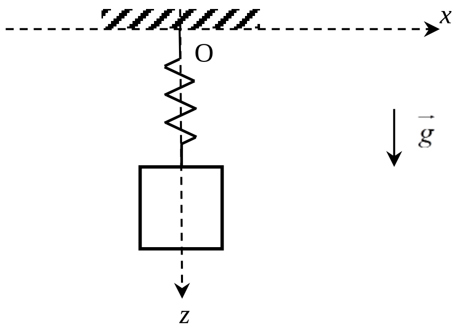
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\frac{2}{\tau}\frac{d\alpha}{dt}+\omega_0^2\alpha=\omega_0^2\alpha_\infty$$

où τ et ω_0 sont des constantes à déterminer en fonction des caractéristiques du système. Discuter des différents mouvements possibles selon les paramètres du problème.

4/ Montrer que la mesure de la position d'équilibre du cadre permet de déterminer le courant *i* circulant dans le circuit électrique.

Exercice 13 : Oscillations d'une spire dans un champ magnétique non uniforme

Un cadre carré, de masse *m*, de résistance *R* et de côté *a*, se déplace verticalement dans un champ magnétique $\vec{B}=(B_0-bz)\overrightarrow{u_y}$. On note *k* la constante de raideur du ressort et l_0 sa longueur à vide.



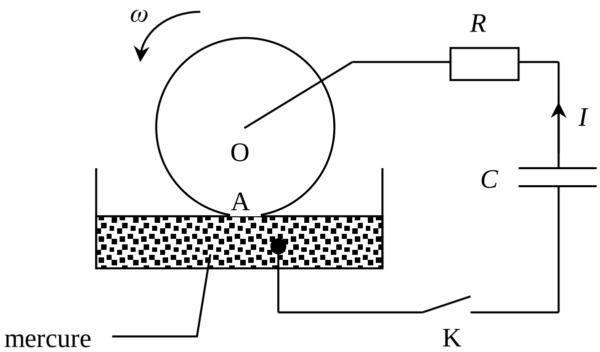
A l'équilibre, le centre du cadre est à l'altitude z_0. On le lâche de la position z_0+Z_0 sans vitesse initiale.

1/ Établir l'équation du mouvement et la résoudre. On négligera les frottements dus à l'air.

2/ Effectuer un bilan énergétique entre les instants *t* et *t+dt*.

Exercice 14 : Roue de Barlow

Une roue de Barlow $\mathcal{R}$ est modélisée par un disque métallique homogène de centre O, de rayon *a*, de moment d'inertie *J* par rapport à son axe horizontal Oz autour duquel elle peut tourner librement. Elle est connectée à un circuit électrique comportant une résistance *R* et un condensateur de capacité *C*, entre les points O et A, son point inférieur qui trempe dans un bain de mercure. La totalité de la surface de $\mathcal{R}$ est plongée dans un champ magnétique extérieur uniforme et permanent $\overrightarrow{B_0}=B_0\vec{e}_z$ (l'axe Oz est orthogonal au plan de la figure).



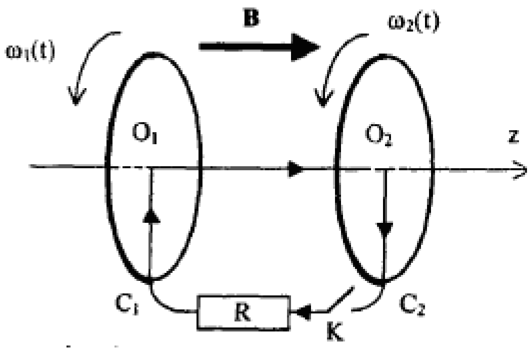
A l'instant initial, on communique à la roue une vitesse angulaire ω_0.

1/ Déterminer l'évolution de la vitesse angulaire de rotation de la roue.

2/ Effectuer un bilan énergétique entre $t=0$ et $t\to\infty$.

Exercice 15 : Couplage électromécanique entre deux disques en rotation

On considère deux disques conducteurs, identiques, de masse *m*, de rayon *a* et de moment d'inertie $J=\frac{ma^2}{2}$ par rapport à leur axe horizontal, autour duquel ils peuvent tourner sans frottement. On relie par un fil électrique leurs centres O_1 et O_2. Deux points de la périphérie, C_1 et C_2, sont reliés par l'intermédiaire d'un interrupteur K et d'une résistance *R*. On admet que les courants les parcourent selon C_1O_1 et O_2C_2.



Initialement, les disques tournent dans le même sens avec les vitesses angulaires ω_{10} et ω_{20}. On les plonge dans le champ magnétique $\vec{B} = B\vec{e_z}$, uniforme et constant. A $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

1/ Établir les équations décrivant $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ en fonction des données. Représenter leur évolution sur un même graphe. On suppose $\omega_{20} > \omega_{10}$.

2/ Établir l'expression de $i(t)$.

3/ Effectuer un bilan énergétique entre les instants t et $t+dt$ puis entre $t = 0$ et $t \to \infty$. Commenter.